Квадратни уравнения. Квадратен тричлен

Информация

Уравнение от вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, се нарича квадратно уравнение, а изразът $D=b^2-4ac$ - дискриминанта. Ако $D<0$, уравнението няма реални корени. Ако $D=0$, уравнението има два равни реални корена $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. Ако $D>0$, уравнението има два различни реални корена $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Ако $b=2k$, за корените може да се използва формулата $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$.

Многочлен от вида ax^2+bx+c, $a\neq 0$, се нарича квадратен тричлен. Той може да се запише във вида $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$, като се казва, че е отделен точен квадрат. Ако уравнението $ax^2+bx+c=0$ има два реални корена x_1 и x_2 $(D\geq 0)$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Ако уравнението $ax^2+bx+c=0$ няма реални корени, то квадратният тричлен е неразложим, т. е. не може да се представи като произведение на два двучлена от първа степен с реални коефициенти.

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$		
$D<0$	$D=0$	$D>0$
Няма реални корени	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
ax^2+bx+c е неразложим	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Непълните квадратни уравнения $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$, $ax^2=0$, $a\neq 0$, се решават чрез разлагане на множители или директно.

1. *Непълни квадратни уравнения*

1. Да се реши уравнението:

а) $x^2-9=0$; б) $4x^2-1=0$; в) $2x^2-3=0$;

г) $x^2-\frac{1}{2}=0$; д) $x^2+1=0$; е) $-9x^2-4=0$;

ж) $x^2+2x=0$; з) $3x^2-\frac{1}{4}x=0$; и) $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}x=0$;

й) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{6}x=0$; к) $4x^2+6x=9x^2-1{,}5x$; л) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$.

2. Да се реши уравнението в зависимост от стойностите на параметъра *a* или *k*:

а) $ax^2+2=0$; б) $x^2+\kappa-1=0$; в) $ax^2+a^2-5a=0$;

г) $ax^2-\frac{k}{a}=0$; д) $\kappa x^2-3x=0$; е) $(a-1)x^2+2ax=0$.

Решение г): Допустимите стойности за *a* са $a\neq 0$. Даденото уравнение записваме във вида $x^2=\frac{k}{a^2}$. Ако $k\geq 0$, $x=\pm\frac{\sqrt{k}}{|a|}$; ако $k<0$, уравнението няма решение.

3. Да се реши уравнението:

а) $x^2-|x|=0$; б) $x^2+2|x|=0$; в) $x|x|+7x=0$.

Решение б): Ако $x\geq 0$, даденото уравнение е еквивалентно на $x^2+2x=0$, т. е. $x(x+2)=0$, следователно $x=0$ или $x=-2$. Решение на даденото уравнение е само числото 0, което удовлетворява условието $x\geq 0$, а -2 < 0 не е решение.

Ако $x<0$, уравнение е еквивалентно на $x^2-2x=0$, т. е. $x(x-2)=0$, следователно $x=0$ или $x=2$. Получените числа не удовлетворяват условието $x<0$, следователно не са решение на даденото уравнение.

Получихме, че уравнението има само един корен $x=0$.

4. Да се реши уравнението $x^2+\kappa|x|=0$ в зависимост от стойностите на параметъра *к*.

2. *Корени на квадратно уравнение*

5. Да се провери дали даденото число е корен на уравнението:

а) 2 на $x^2-4x-5=0$; б) -1 на $x^2-4x-5=0$; в) -1 на $2x^2+x-3=0$;

г) $\frac{1}{5}$ на $5x^2+14x-3=0$; д) $\sqrt{2}$ на $-3x^2+\sqrt{2}x+1=0$; е) $10-2\sqrt{5}$ на $x^2-20x+80=0$.

6. Да се установи дали корените на уравнението са реални и различни:

а) $x^2-5x-4=0$; б) $9x^2-42x+49=0$;

в) $2x^2+8x+3=0$; г) $x^2+x+2=0$.

7. Да се реши уравнението:

а) $x^2-4x+3=0$; б) $x^2-5x-14=0$; в) $9x^2-6x+1=0$;

г) $x^2+14x+49=0$ д) $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$; е) $x^2+2(1-\sqrt{3})x+4-2\sqrt{3}=0$;

ж) $3x^2-2x+5=0$; з) $2x^2+5\sqrt{3}x+10=0$; и) $x^2-5\sqrt{5}x+30=0$;

й) $x^2+2x-1=0$; к) $\sqrt{3}x^2-x-4\sqrt{3}=0$; л) $\sqrt{2}x^2-x-\sqrt{18}=0$;

м) $x^2-41x+408=0$; н) $72x^2-125x+53=0$; о) $x^2-\frac{7}{5}x+0{,}48=0$;

п) $(x+3)^2-6(x-3)=3\sqrt{12}\,x$; р) $\sqrt{2}\,x^2-x\left(\sqrt{8}\,x-2\sqrt{7}\right)+\frac{2}{\sqrt{2}}=0$;;

с) $\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{6}\right)^2=\sqrt{6}\left(2\sqrt{2}\,x+1\right)$; т) $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}(x+1)-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=0$;

у) $x(x-2)+\frac{x}{2-\sqrt{3}}-\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{63}}=0$.

8. Да се реши уравнението:

а) $(x-2)^2+(x-1)(x+1)=7-x^2$; б) $(x-2)(x^2+2x+4)-x^2(x-1)+x^2+2=11(x-1)$;

в) $(x-3)^3+(1-x)(x^2+x+1)=3x-10$; г) $x^2+3(x+1)(x-2)-2(x-3)^2=-6$;

д) $4(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})+(x-2\sqrt{5})^2=0$; е) $(x-\sqrt{2})^3-(x+\sqrt{2})^3=0$;

ж) $\left(x^2+3\frac{5}{12}x+1{,}25\right)(x^2+1)=0$; з) $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)=11x+30$.

9. Да се намери при кои стойности на *x* квадратният тричлен $x^2+7x+10$ има стойност:

а) 0; б) 4; в) -5.

10. Да се намерят стойностите на *x*, при които квадратният тричлен x^2+7x+6 и двучленът $x+1$ имат равни стойности.

11. Да се намерят и подредят във възходящ ред корените на уравненията:

а) $6x^2-10x-1=0$, $2x^2+15x+5=0$ и $7x^2-27x+12=0$;

б) $4x^2+3x-2=0$, $5x^2+24|x|+12=0$ и $\sqrt{5}x(\sqrt{5}x-3)=2x(2x-\sqrt{5})$.

12. Да се реши уравнението:

а) $x^2-|x|-2=0$; б) $4x^2-4|x|-3=0$; в) $x^2+|2x+15|=0$;

г) $5x^2-10x-3=3|x+1|$; д) $|3-2(x^2+2)|+8x+2=0$; е) $|x^2-3|+2x=0$.

3. *Да обърнем внимание на коефициентите*

13. Да се докаже, че ако $q<0$, то за всяко реално число *p* уравнението $x^2+px+q=0$ има два различни реални корена.

14. Да се докаже, че за квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ са в сила твърденията:

а) Ако $a+b+c=0$, то $x_1=1$ и $x_2=\frac{c}{a}$. б) Ако $a-b+c=0$, то $x_1=-1$ и $x_2=-\frac{c}{a}$.

15. Да се докаже, че ако реалните числа a_1, a_2, b_1, b_2 удовлетворяват равенството $a_1a_2=2(b_1+b_2)$, то поне едно от уравненията $x^2+a_1x+b_1=0$ и $x^2+a_2x+b_2=0$ има реални корени.

Решение: Да допуснем, че $D_1=a_1^2-4b_1<0$ и $D_2=a_2^2-4b_2<0$. Тогава $(a_1a_2)^2<16b_1b_2 \Rightarrow 4(b_1+b_2)^2<16b_1b_2 \Rightarrow 4(b_1-b_2)^2<0$, което е невъзможно.

16. Да се докаже, че ако *p* и *q* са нечетни числа, то уравнението $x^2+px+q=0$ няма рационални корени.

17. Да се докаже, че ако a е цяло число и $|a| \neq 2$, то уравнението $x^2 + ax + 1 = 0$ няма рационални корени.

18. Да се намерят всички цели стойности на параметъра k, за които корените на квадратното уравнение $kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$ са рационални.

Решение: Намираме дискриминантата на уравнението $D = (2k-1)^2 - 4k(k-2) = 4k+1$. Тъй като k е цяло число, тя е нечетно число. За да има уравнението рационални корени, трябва дискриминантата да бъде точен квадрат на нечетно число. Тогава $4k+1 = (2n+1)^2$, където n е цяло число. От тук намираме $k = n^2 + n, n \in Z$.

19. Дадено е уравнението $(a^2 - 6a + 11)x^2 - (a^2 - 6a + 19)x + 8 = 0$, където a е реален параметър. Да се намери стойността на a, при която

а) сборът от корените на уравнението има най-голяма стойност;

б) разликата между корените на уравнението е по-малка от 1.

Решение: Да означим $p = a^2 - 6a + 11 = (a-3)^2 + 2 \geq 2$. Даденото уравнение записваме във вида $px^2 - (p+8)x + 8 = 0$. Тогава корените, изразени чрез p, са $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{8}{p}$.

а) $x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{8}{p} \leq 1 + \dfrac{8}{2} = 5$. Следователно сборът от корените на уравнението има най-голяма стойност при p = 2, т.е. a = 3 и тя е 5.

б) Тъй като $x_1 = 1$, разликата между корените на уравнението е по-малка от 1, точно когато $x_2 \in (0,2)$, т.е. $0 < \dfrac{8}{a^2 - 6a + 11} < 2$. Следователно $a \in \left(-\infty; 3 - \sqrt{2}\right) \cup \left(3 + \sqrt{2}; +\infty\right)$.

4. *Разлагане на множители*

20. Да се разложи на множители квадратният тричлен:

а) $x^2 - 5x - 24$; б) $x^2 - 11x + 28$; в) $2x^2 - 7x + 3$;

г) $2 - 5x - 3x^2$; д) $x^2 + 5x + 7$; е) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2}$.

21. Да се разложи на множители многочлена:

а) $x^4 - 13x^2 + 36$; б) $x^4 + x^2 - 2$; в) $x^4 + 7x^2 + 12$; г) $x^6 + 7x^3 - 8$.

22. Да се съкрати дробта:

а) $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 25}$; б) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - 3x - 2}$; в) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$; г) $\dfrac{4 - 3x - x^2}{2x^2 - x - 1}$.

5. *Да получим квадратно уравнение*

23. Да се реши уравнението, като чрез полагане се сведе до квадратно уравнение:

а) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$; б) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; в) $x^4 + 10x^2 + 21 = 0$;

г) $x^6+2x^3+1=0$; д) $\left(x^2-4x\right)^2+2\left(x^2-4x\right)-3=0$; е) $\left(\frac{x^2+9}{x+1}\right)^2-\frac{4\left(x^2+9\right)}{x+1}-5=0$.

24. Да се реши уравнението:

а) $x^3-81x=0$; б) $7x^4-63x^2=0$; в) $x^3+3x^2-4x-12=0$;

г) $x^4+x^3+x+1=0$; д) $x^3-3x^2+x+1=0$ е) $(3-x)^2=27-27x+9x^2-x^3$.

25. Да се реши уравнението $x^3+\left(1-a^2\right)x+a=0$, където a е реален параметър.

Решение: Разглеждаме даденото уравнение като квадратно уравнение спрямо параметъра a и го записваме във вида $xa^2-a-\left(x^3+x\right)=0$. Корените му са $a_1=\frac{x^2+1}{x}$ и $a_2=-x$. Като използваме формулата за разлагане на квадратен тричлен получаваме уравнението $x\left(a-\frac{x^2+1}{x}\right)(a+x)=0 \Leftrightarrow \left(xa-x^2-1\right)(a+x)=0$. От тук намираме корените на даденото уравнение: $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ и $x_3=-a$.

Даденото уравнение може да се реши и като се забележи, че $-a$ е негов корен и след това се разложи на множители.

6. *Да отделим точен квадрат*

26. Да се докаже, че за всяка реална стойност на x квадратният тричлен:

а) $x^2-14x+49$ приема само неотрицателни стойности;

б) $4x^2-3x+1$ приема само положителни стойности;

в) $-9x^2+30x-25$ приема само неположителни стойности;

г) $-x^2+6x-10$ приема само отрицателни стойности.

27. Да се докаже, че за всяка реална стойност на x е вярно неравенството:

а) $x^2-4x+5>0$; б) $-2x^2+x-1<0$.

28. Да се намери най-малката стойност m на квадратния тричлен и съответната стойност на x:

а) $f(x)=4x^2+4x+1$; б) $f(x)=x^2+4x+8$; в) $f(x)=2x^2-2\sqrt{2}x-5$.

7. *Задачи с параметри*

29. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението:

а) $x^2-(2a-1)x+a^2+a-16=0$ има корен 2;

б) $x^2+(a-x)x-4=0$ има корен $a+1$.

30. За кои стойности на реалния параметър m квадратното уравнение $(m-1)x^2+x+1=0$ има реални корени?

31. За кои стойности на реалния параметър p уравнението $(2-p)x^2+3x+5=0$ има реални корени?

32. За кои стойности на реалния параметър κ уравнението $(\kappa-1)x^2+2\kappa x+\kappa=0$ има два различни реални корена?

33. Да се реши уравнението в зависимост от стойностите на съответния реален параметър:

а) $x^2+2mx-3m^2=0$; б) $x^2-(p-3)x-3p=0$; в) $x^2+5mx+4m^2-1=0$;

г) $x^2+3x-p+4=0$; д) $(p+2)x^2-6px+9p-3=0$; е) $x(x-2p)+2(x-p)=3-p^2$.

34. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравненията $2ax^2-2x+1=0$ и $(a^2-3a)x^2+4x-2=0$ са еквивалентни.

35. Да се намерят стойностите на параметъра m, при които уравненията $2x^2-(3m+2)x+12=0$ и $4x^2-(9m-2)x+36=0$ имат общ корен.

36. Да се намери множеството от стойности на функцията $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x^2-x+2}$.

Решение: Тъй като $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{7}{4}>0$, то функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко реално число x. Търсеното множество се състои от всички реални числа y, за които уравнението $\dfrac{x^2+3x+6}{x^2-x+2}=y$ има поне едно решение. Разглеждаме y като параметър, освобождаваме се от знаменателя и записваме уравнението във вида $(1-y)x^2+(3+y)x+6-2y=0$. То има реално решение точно когато дискриминантата му е неотрицателна. От тук

$$(3+y)^2-4(1-y)(6-2y)\geq 0 \iff 7y^2-38y+15\leq 0 \iff (7y-3)(y-5)\leq 0 \iff y\in\left[\frac{3}{7};5\right].$$

Следователно множеството от стойности на функцията е интервала $\left[\dfrac{3}{7};5\right]$.

37. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=\dfrac{x^2-2x+6}{x^2+x+1}$.

8. *Математичеси модели*

38. Намислих едно число. Удвоих го и прибавих квадрата на числото. Получих 24. Да се намери намисленото число.

39. Цифрата на единиците на двуцифрено число е с 3 по-голяма от цифрата на десетиците, а произведението на цифрите е със 17 по-голямо от сбора им. Да се намери числото.

40. Шахматен турнир се организира по системата “всеки срещу всеки”. Да се намери броят на участниците, ако са били изиграни 153 партии.

41. Съученици си разменяли сувенири, като всеки подарява на всеки сувенир. Да се намери броят на учениците, ако са разменени общо 42 сувенира.

42. Двама работници заедно могат да извършат за 4 дни $\frac{2}{3}$ от определената работа. За колко дни всеки работник сам може да извърши работата, ако първият може да я извърши за 5 дни по-малко от втория?

43. Двама туристи тръгнали едновременно от една хижа към друга, отдалечена на 30 км от нея. Единият пристигнал един час по-рано от другия. Да се намерят скоростите на туристите ако единият се движи с 1 км/ч по-бързо от другия.

44. В съд има 90 литра сярна киселина. Отлели известно количество киселина и допълнили съда със същото количество вода. След това отново отлели същото количество от получения разтвор и допълнили с вода. Получил се 49 % разтвор на сярна киселина. Да се намери колко литра са отливали всеки път.

Квадратни уравнения. Квадратен тричлен

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ:

1. а) ± 3; б) $\pm\frac{1}{2}$; в) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) няма реални корени; е) няма реални корени; ж) $-2;0$; з) $0;\frac{1}{12}$; и) $0;2$; й) $0;\sqrt{2}$; к) $0;\frac{3}{2}$; л) ± 8.

2. а) ако $a \ge 0$, няма решение; ако $a < 0$, $x = \pm\sqrt{-\frac{2}{a}}$; б) ако $\kappa > 1$, няма решение; ако $\kappa \le 1$, $x = \pm\sqrt{1-\kappa}$; в) ако a = 0, всяко реално число е решение, ако $a \in (-\infty;0) \cup (0;5]$, $x = \pm\sqrt{5-a}$, ако $a \in (5;+\infty)$, няма реални корени; д) ако $\kappa = 0$, $x = 0$; $\kappa \ne 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{\kappa}$; е) ако $a = 1$, $x = 0$; ако $a \ne 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{1-a}$.

3. а) $0;\pm 1$; в) 0.

4. ако $\kappa \ge 0$, $x = 0$; ако $\kappa < 0$, $x = 0$; $\pm\kappa$.

5. а) не; б) да; в) не; г) да; д) не; е) да.

6. а) да; б) не; в) да; г) не.

7. а) $1;3$; б) $-2;7$; в) $\frac{1}{3}$; г) -7; д) $\sqrt{3}$; е) $\sqrt{3}-1$; ж) няма реални корени; з) няма реални корени; и) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$; й) $-1 \pm \sqrt{2}$; к) $-\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; л) $-\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; м) $17;24$; н) $-\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}$; о) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$; п) $3\sqrt{3}$; р) $\frac{\sqrt{7}\pm 3}{\sqrt{2}}$; с) няма реални корени; т) $0,-\sqrt{5}$; у) $\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}$.

8. а) $-\frac{2}{3};2$; б) $\frac{1}{2};5$; в) $\frac{4}{3}$; г) $-6;\frac{3}{2}$; д) $0;\frac{4\sqrt{5}}{5}$; е) няма реални корени; ж) $-3;-\frac{5}{12}$; з) $5;-\frac{10}{3}$.

9. а) $-2;-5$; б) $-1;-6$; в) няма такава стойност.

10. $-1;-5$.

11. а) $\frac{-15-\sqrt{185}}{4}$, $\frac{-15+\sqrt{185}}{4}$, $\frac{5-\sqrt{31}}{6}$, $\frac{27-\sqrt{393}}{14}$, $\frac{5+\sqrt{31}}{6}$, $\frac{27+\sqrt{393}}{14}$; б) $\frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, 0, $\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$, $\sqrt{5}$.

12. а) ± 2; б) $\pm\frac{3}{2}$; в) няма реални корени; г) $-\frac{2}{5};0;\frac{7}{5};3$; д) $\frac{-4\pm\sqrt{10}}{2}$; е) $-1;-3$, *Упътване*: Запишете уравнението във вида $\left|x^2-3\right|=-2x$. Тогава $x<0$ и уравнението е еквивалентно с $\left(x^2-3\right)^2=4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-3-2x\right)\left(x^2-3+2x\right)=0$, $x=-1$ или $x=-3$.

13. *Упътване*: Разгледайте знака на дискриминантата.

14. *Упътване*: Заместете посочените числа в уравнението и проверете, че са корени.

16. *Упътване*: Допускаме, че уравнението има за корен рационалното число $\frac{m}{n}$. Без ограничение на общността можем да приемем, че целите числа m и n са взаимно прости и $n>0$, т. е. дробта е несъкратима. След заместване в уравнението получаваме $\left(\frac{m}{n}\right)^2+p.\frac{m}{n}+q=0 \Leftrightarrow m^2=-pmn-qn^2$. Тъй като n дели дясната страна, следва, че дели и лявата, т. е. m. Тогава $n=1$ и рационалният корен е цяло число m. Отново заместваме в уравнението и получаваме $m^2+pm+q=0 \Leftrightarrow m(m+p)=-q$. Числото от лявата страна е четно, а от дясната – нечетно. Полученото противоречие се дължи на допускането, че уравнението има рационален корен.

17. *Упътване*: Допускаме, че уравнението има за корен рационалното число $\frac{p}{q}$, p и q са взаимно прости цели числа. Тогава при заместване в уравнението получаваме $p^2+apq+q^2=0$. Следователно q дели p^2, откъдето $q=\pm1$. Аналогично p дели q^2, откъдето $p=\pm1$. Следователно 1 или -1 е корен и намираме $a=-2$ или $a=2$. Последното е противоречие с условието $|a|\neq 2$.

20. а) $(x-8)(x+3)$; б) $(x-7)(x-4)$; в) $(2x-1)(x-3)$; г) $-(3x-1)(x+2)$; д) $\frac{1}{4}\left(2x+5-\sqrt{7}\right)\left(2x+5+\sqrt{7}\right)$; е) $\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

21. а) $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$; б) $(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)$; в) $\left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right)$; г) $(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$.

22. а) $\frac{x-1}{x-5}$; б) $\frac{x-5}{2x+1}$; в) $\frac{x+1}{x-2}$; г) $-\frac{x+4}{2x+1}$.

23. а) $\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{5}$; б) ± 2; в) няма реални корени; г) -1; д) $1;3;2\pm\sqrt{5}$; е) $1;4$.

24. а) 0; $\pm$ 9; б) 0; $\pm$ 3; в) $-3;\pm 2$; г) -1; д) $1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; е) 2; 3.

26. а) $x^2-14x+49=(x-7)^2\geq 0$; б) $4x^2-3x+1=\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}>0$; в) $-9x^2+30x-25=-(3x-5)^2\leq 0$; г) $-x^2+6x-10=-(x-3)^2-1<0$.

27. а) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$; б) $-2x^2+x-1=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{7}{8}<0$.

28. а) $m=0$ при $x=-\frac{1}{2}$; б) $m=4$ при $x=-2$; в) $m=-6$ при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

29. а) $-2;5$; б) $-2;1$.

30. $\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right]$.

31. $\left[-\frac{31}{20};+\infty\right)$.

32. $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

33. а) $-3m, m$; б) $-3, p$; в) $\frac{-5m\pm\sqrt{9m^2+4}}{2}$; г) ако $p<\frac{7}{4}$, няма реални корени, ако $p\geq\frac{7}{4}$, $x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{4p-7}}{2}$; д) ако $p=-2$, $x=\frac{7}{4}$; ако $p\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;\frac{2}{5}\right]$, $x_{1/2}=\frac{3p\pm\sqrt{6-15p}}{2}$; ако $p\in\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$, няма реални корени; е) $p\in\left(-\infty;+\infty\right)$, $x_1=p-3$ и $x_2=p+1$.

34. $0; -1$; $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

35. *m* = 3. *Упътване*: Образувайте система от двете уравнения с неизвестни *x* и *m*.

37. Най-малка стойност $\frac{2}{3}$, най-голяма стойност 10 (използвайте решението на задача 36).

38. -6 или 4.

39. числото е 47.

40. 18 участници.

41. 7 ученици.

42. 10 дни и 15 дни.

43. 5 км/ч и 6 км/ч.

44. 27литра.