1113 София
Ул. „Акад. Г. Бончев”, бл. 8
Институт по математика и
Информатика при БАН,
Ваня Хаджийски

Решение на задача М+379

От Митко Христов Кунчев
Директор на МГ „Баба Тонка”, Русе
Ул. „Иван Вазов” 18
direktor@mg-babatonka.bg
83 43 23

М+379. Върху страните AB, BC и CA на ΔABC са взети съответно точки M, N и P така, че $AM : MB = BN : NC = 1 : 2$ и $\angle APM = \angle MPN$. Да се намери $\angle PMN$.

Решение: Поради положението на точките M и N е сигурно, че правата MN пресича правата AC в точка L, като точка A е между L и C. Идеята на решението е да се докаже, че $LM = MN$. Тогава в ΔLPN отсечката PM ще бъде ъглополовяща и медиана и ще следва, че е и височина, т. е. $\angle PMN = 90^o$.

За ΔABC и точките L, M и N, които лежат на една права, прилагаме теоремата на Менелай и получаваме последователно:

$$\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CL}{LA}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{CL}{LA}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{CL}{LA}=\frac{4}{1} \quad\Rightarrow\quad \frac{CA}{AL}=\frac{3}{1}.$$

Отново от теоремата на Менелай за ΔLNC и точките A, M и B, които лежат на една права получаваме:

$$\frac{LM}{MN}\frac{NB}{BC}\frac{CA}{AL}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{LM}{MN}\frac{1}{3}\frac{3}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{LM}{MN}=\frac{1}{1} \quad\Rightarrow\quad LM=MN.$$

Съгласно написаното в началото намираме $\angle PMN = 90^o$.