Драга Редакция,

Изпращам ви решение на задача 2 от брой 3/2003 г. на списание “Математика и Информатика”.

Митко Христов Кунчев, директор на МГ “Баба Тонка”, гр. Русе
Адрес: 7000 Русе, ул. “Иван Вазов” 18
Тел.: 83 43 23, e-mail: direktor@mg-babatonka.bg

Задача 2. Дължините на страните на триъгълник образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че триъгълникът е нетъпоъгълен тогава и само тогава, когато $\mathbf{R} \le 2{,}5.\mathbf{r}$, където **R** и **r** са радиусите на описаната и вписаната окръжност на триъгълника.

Решение. От условието следва, че съществуват реални числа $\mathbf{x} > 0$ и $\mathbf{d} \ge 0$ такива, че дължините на страните на триъгълника са $\mathbf{x - d}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x + d}$.

Ако $\mathbf{d} = 0$ то триъгълникът е равностранен и $\mathbf{R} = 2.\mathbf{r} \le 2{,}5.\mathbf{r}$.

Нека $\mathbf{d} > 0$. Тогава $\mathbf{x - d} < \mathbf{x} < \mathbf{x + d}$, т.е. $\mathbf{x + d}$ е най-дългата страна. Триъгълникът е нетъпоъгълен тогава и само тогава, когато $(\mathbf{x}+\mathbf{d})^2 \le \mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{d})^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^2 + 2.\mathbf{x}.\mathbf{d} + \mathbf{d}^2 \le \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^2 - 2.\mathbf{x}.\mathbf{d} + \mathbf{d}^2 \Leftrightarrow 4.\mathbf{x}.\mathbf{d} \le \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow 4.\mathbf{d} \le \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} > 0).$$

Извод: Триъгълникт е нетъпоъгълен тогава и само тогава, когато $4.\mathbf{d} \le \mathbf{x}$. (1)

Ще използваме известни формули за връзка между страните на триъгълника, **p** – полупериметъра, **S** – лицето, **R** и **r**:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{d}+\mathbf{x}+\mathbf{x}+\mathbf{d}}{2} = \frac{3}{2}\mathbf{x}; \qquad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{p}} = \frac{2\mathbf{S}}{3\mathbf{x}}; \qquad \mathbf{R} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{d})\mathbf{x}(\mathbf{x}+\mathbf{d})}{4\mathbf{S}};$$

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{x}\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}-\mathbf{x}+\mathbf{d}\right)\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}-\mathbf{x}\right)\left(\frac{3}{2}\mathbf{x}-\mathbf{x}-\mathbf{d}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}\mathbf{x}^2\left(\frac{\mathbf{x}^2}{4}-\mathbf{d}^2\right)}.$$

Сега получаваме $\mathbf{R} \le 2{,}5.\mathbf{r} \Leftrightarrow \dfrac{(\mathbf{x}^2-\mathbf{d}^2)\mathbf{x}}{4\mathbf{S}} \le \dfrac{5}{2}.\dfrac{2\mathbf{S}}{3\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x}^2(\mathbf{x}^2-\mathbf{d}^2) \le \dfrac{20}{3}\mathbf{S}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^2(\mathbf{x}^2-\mathbf{d}^2) \le \frac{20}{3}.\frac{3}{4}\mathbf{x}^2\left(\frac{\mathbf{x}^2}{4}-\mathbf{d}^2\right) \Leftrightarrow 4\mathbf{x}^2 - 4\mathbf{d}^2 \le 5\mathbf{x}^2 - 20\mathbf{d}^2 \Leftrightarrow 16\mathbf{d}^2 \le \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow 4\mathbf{d} \le \mathbf{x}.$$

Извод: $\mathbf{R} \le 2{,}5.\mathbf{r} \Leftrightarrow 4\mathbf{d} \le \mathbf{x}$. (2)

От (1) и (2) следва верността на твърдението в задачата.