Обучението по математика и информатика, брой 6, 1999 г.

РЕШАВАНЕ НА МОДУЛНИ НЕРАВЕНСТВА ЧРЕЗ ПОВДИГАНЕ В КВАДРАТ

Митко Кунчев, МГ „Баба Тонка" - Русе

Целта на тази статия е да се обърне внимание на един доста рядко срещан начин за решаване на модулни неравенства и разшири приложението на дадената по-долу **Т1**, която традиционно се използва за решаване на ирационални неравенства.

Решаването на модулни неравенства чрез повдигане в квадрат се среща само в един български учебник по математика – [9] на стр. 20. Там е доказано, че $|ax+b|<|cx+d| \Leftrightarrow (ax+b)^2<(cx+d)^2$ и е решено неравенството $|2x+3|\geq|3-4x|$. По нататък ще използваме следните твърдения:

Т е о р е м а 1. Ако стойностите на $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни за всички допустими стойности на x, то

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x) \quad \text{и} \quad f(x)>g(x) \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x).$$

Тази теорема е частен случай на **Т3** от [7], стр. 67.

Т е о р е м а 2. За всяка допустима стойност на x е вярно, че

$$|f(x)|^2=f^2(x).$$

Верността на последното следва от определението на понятието модул и факта, че

$$(-f(x))^2=f^2(x) .$$

Примери.

З а д а ч а 1. Да се реши неравенството $|2x-1|>2$.

Ще решим неравенството по три начина.

Р е ш е н и е. *Първи начин:* Решаваме неравенството според [1]:

$|2x-1|>2 \Leftrightarrow 2x-1<-2$ или $2x-1>2 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$ или $x>\frac{3}{2}$, т.е. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Втори начин: Ще разгледаме два случая:

I. Сл. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$, тогава $|2x-1|>2 \Leftrightarrow -2x+1>2$ и получаваме $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

II. Сл. $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, тогава $|2x-1|>2 \Leftrightarrow 2x-1>2$ и получаваме $x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Трети начин: Тъй като двете страни на $|2x-1|>2$ удовлетворяват **Т1**, неравенството може да бъде решено и така:

$$|2x-1|>2 \Leftrightarrow (2x-1)^2>2^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2-2^2>0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1)>0$$

т.е. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Повод за написване на тази статия е следната задача от кандидат-студентския изпит по математика в Софийския университет "Св. Климент Охридски" от 21.07.97:

З а д а ч а 2. а) Да се реши неравенството $\left|x^2-5x+2\right|\le 4$.

б) Да се намери броят на целите числа, които са решения на неравенството.

Р е ш е н и е. Ще решим само подточка а).

Тъй като двете страни на неравенството са неотрицателни за всички допустими стойности на неизвестното имаме:

$$\left|x^2-5x+2\right|\le 4 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+2\right)^2\le 4^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+2\right)^2-4^2\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x-2\right)\left(x^2-5x+6\right)\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)(x-2)(x-3)\le 0.$$

С метода на интервалите веднага получаваме $x\in\left[\frac{5-\sqrt{33}}{2};2\right]\cup\left[3;\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$.

Да разгледаме още един пример:

З а д а ч а 3. Да се реши неравенството $\left|\frac{x+2}{3x-1}\right|\ge 1$.

Р е ш е н и е. Отново отбелязваме, че двете страни са неотрицателни за всяка допустима стойност на x, т.е. за $x\ne\frac{1}{3}$. Тогава:

$$\left|\frac{x+2}{3x-1}\right|\ge 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{3x-1}\right)^2\ge 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{3x-1}-1\right)\left(\frac{x+2}{3x-1}+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3-2x)(4x+1)}{(3x-1)^2}\ge 0 \Leftrightarrow (3-2x)(4x+1)\ge 0; x\ne\frac{1}{3}.$$

С метода на интервалите намираме $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$.

З а д а ч а 4. Да се реши неравенството $\sqrt{\left(x^2+4x+4\right)}<3$.

Р е ш е н и е. Обикновено такова неравенство първо се свежда до модулно и след това се решава както се учи в седми клас. Всъщност модулното неравенство лесно може да бъде избегнато. На лице е условието на **Т1**, следователно:

$$\sqrt{\left(x^2+4x+4\right)}<3 \Leftrightarrow (x+2)^2<3^2 \Leftrightarrow (x+2)^2-3^2<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+5)(x-1)<0\text{, т.е. } x\in(-5;1).$$

Решаването на модулни неравенста чрез повдигане в квадрат може да бъде ефективно и при задачи от вида:

З а д а ч а 5. Да се реши неравенството:

$$\left|x^2-x-2\right|<\left|x^2-7x-40\right|.$$

Р е ш е н и е. Очевидно можем да приложим **Т1**:

$$\left|x^2-x-2\right|<\left|x^2-7x-40\right| \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)^2<\left(x^2-7x-40\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-x-2-x^2+7x+40\right)\left(x^2-x-2+x^2-7x-40\right)<0 \Leftrightarrow$$
$$(6x+38)\left(2x^2-8x-42\right)<0 \Leftrightarrow 4(3x+19)(x+3)(x-7)<0.$$

Отново от метода на интервалите $x\in\left(-\infty;-\frac{19}{3}\right)\cup(-3;7)$.

Задачи за самостоятелна работа:

1. $\left|x^3 - x^2 - 4x - 38\right| > 42$ Отг.: $x \in (-\infty; -2) \cup (1;2) \cup (5; +\infty)$

2. $\left|x^2 - x - 3\right| < 9$ (виж [8], стр. 57)

3. $\left|6x^2 - 2x + 1\right| \le 1$ (виж [6], стр. 56)

4. $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1$ (виж [3], стр. 115)

5. $\left|\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| \le 3$ (виж [6], стр. 56)

6. $\left|x - 6\right| > \left|x^2 - 5x + 8\right|$ (виж [8], стр. 70)

7. $\left|x^2 + 2x - 8\right| > \left|2x + 6\right|$ (виж [3], стр. 115)

В достъпната за повечето учители и ученици математическа книжнина се срещат твърде малко решения на модулни неравенства чрез повдигане в квадрат, въпреки че това е широко разпространен метод, обикновено прилаган за решаване на ирационални уравнения и неравенства. Единствените примери за решаване на модулно неравенство чрез прилагане на **Т1**, които намерих, са в [6] на стр. 52 и в [9] на стр. 20. Разбира се този метод не е универсален, но в много случаи той е по-ефективен от традиционните. Смятам, че **Т1** трябва да заеме много по-сериозно място в училищния курс по математика.

Цитирана литература.

1. Паскалева, З., Г. Паскалев. Математика за VII клас. Летера-НФ, П., 1996.

2. Лозанов, Ч., Т. Витанов, П. Недевски. Математика за IX клас, Анубис, С., 1998.

3. Коларов, К. и др. Сборник по алгебра 7. – 10. клас. Народна просвета, С., 1987.

4. Копрински, С., Л. Топалов. Ръководство и задачи по математика за ученици и кандидат-студенти. ФУМИ-прес, С., 1992.

5. Шарова, Л. И. Уравнения и неравенства. Вища школа, Киев, 1981.

6. Стоилов, Т. Л., Л. Чилингирова. Задачи от неравенства. Народна просвета, С., 1989.

7. Башмаков, М. И. Уравнения и неравенства. Наука, Москва, 1976.

8. Лазаров, В. Програма за самоподготовка по математика за кандидат-студенти – алгебра. Балканпрес, С., 1997.

9. Тонов, И., И. Трендафилов, Р. Караджова. Математика за VIII клас. Булвест 2000, С., 1999.