МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1988

Пролетна конференция по математика

Слънчев бряг, 6 – 9 април, 1988

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА СИСТЕМИ НЕРАВЕНСТВА ОТ ПЪРВА СТЕПЕН С ДВЕ НЕИЗВЕСТНИ

Митко Кунчев, МГ "Баба Тонка" – Русе

Разглеждат се задачи, водещи до съставяне на математически модели с използване на системи неравенства от първа степен с две неизвестни, които се решават графично.

Създаването и решаването на математически модели е една от основните дейности, които учениците трябва да овладеят, тъй като математическото моделиране е основен подход при прилагане на математиката в другите науки. В този смисъл е особено важно задълбоченото осмисляне на самото понятие математически модел – възпроизвеждане на даден обект или явление чрез система от математически зависимости ([3], стр. 183). Според действащия училищен курс по математика, учениците се сблъскват предимно с математически модели, в които се използват уравнения или системи уравнения. В [3], стр. 28 за пръв път се използва неравенство от първа степен с едно неизвестно за моделиране на някаква ситуация. Твърде малко са задачите, при които се съставят и решават системи неравенства от първа степен с две неизвестни ([2], стр. 134 – една задача свързана с идеята за линейното оптимиране; [5], стр. 113). В крайна сметка, понятието математически модел се възприема твърде едностранчиво. Пропуска се една възможност учениците да бъдат обучавани в използването му в разнообразни ситуации, както и при анализиране на същите.

Да разгледаме няколко типични случая, в които решаването на даден проблем е свързано със съставяне и графично решаване на системи неравенства от първа степен с две неизвестни.

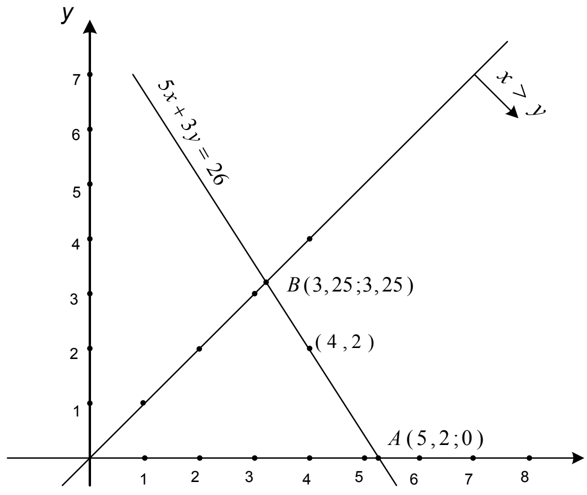
Задача 1. (конкурсен изпит за постъпване в математически гимназии, 1987 г.) За подаръци за Нова година майката на Рени купила няколко кукли и няколко мозайки и платила общо 26 лева. Намерете колко кукли и колко мозайки е купила майката на Рени, ако една кукла струва 5 лева, една мозайка струва 3 лева и броят на куклите е по-голям от броя на мозайките.

Решение. Да означим с x – броя накупените кукли, а с y – броя на купените мозайки. Проследявайки условието получаваме следния математически модел:

$$\left|\begin{array}{l} 5x+3y=26 \\ x>y \\ x\in N \\ y\in N\,. \end{array}\right.$$

Решаването на модел, в който влиза неравенство от първа степен с две неизвестни (макар и елементарно) е ново за учениците. Едно естествено решение на модела е графичното решение. На фиг. 1. са изобразени графиките на уравнението $5x+3y=26$, неравенството $x>y$, както и точки в първи квадрант с цели координати. Очевидно решението е наредена двойка числа, които са координати на някоя от отбелязаните точки, лежащи върху отсечката AB (сечение на множествата). Такава точка има само една – с координати 4 и 2. С това задачата е решена.

Графичното изображение на фиг. 1. може да послужи за досещане как да се реши задачата по друг начин.



Фиг.1

Първоначалното запознаване на учениците с използването на подобни модели може да стане с някоя от следващите две задачи.

Задача 2. С един полет космически ракети от модел *A* и от модел *B* могат да изнесат общо не повече от 10 тона товар. Ако ракета от модел *A* извърши три полета, а ракета от модел *B* – осем полета, то общия товар (при положение, че са максимално натоварени) ще бъде не по-малко от 45 тона.

а) Може ли ракета от модел *A* да изнесе товар 6 тона?

б) Възможно ли е най-големият товар на ракета от модел *B* да е 2,5 тона?

в) Може ли някоя от ракетите да изнесе съоръжение с тегло 7,5 тона (с един полет)?

Решение. Да означим с x и y теглото на най-големия товар, който може да изнесе съответно ракета *A* и ракета *B* (в тонове). При данните от условието получаваме системата:

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ 3x+8y\ge 45 \\ x>0 \\ y>0\,. \end{array}\right.$$

Сечението на решенията на тези четири неравенства е триъгълник *PQM* на фиг. 2. Всички наредени двойки числа, които удовлетворяват условието на задачата определят точки от вътрешнстта и контура на този триъгълник, без отсечката *MP*(най-големият товар на ракетата не можеда е нула). Пресмятаме координатите на пресечните точки *P* (0;5, 625), *Q* (7, 3) и *M* (0, 10).

За да отговорим на въпроса в подточка а) трябва към системата (1) да добавим неравенството $x\ge 6$, т.е. за да може ракетата да изнесе товар 6 тона, максималният й товар трябва да е поне 6 тона. Така получаваме следния математически модел:

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ 3x+8y\ge 45 \\ x\ge 6 \\ y>0\,. \end{array}\right.$$

Очевидно получената система има решение, затова отговорът на въпроса е положителен.

За подточка б) получаваме друг модел:

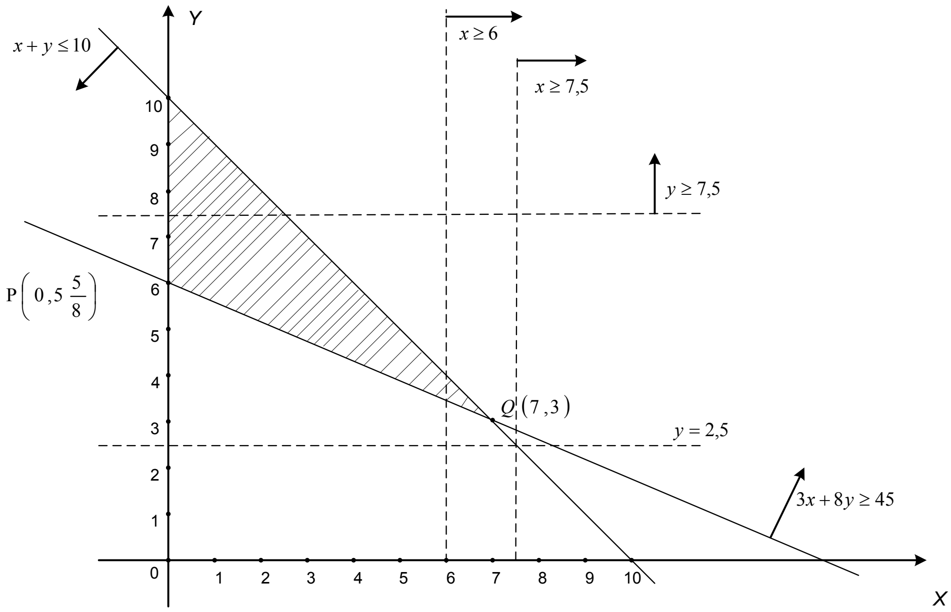
$$(3)\qquad \left|\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ 3x+8y\ge 45 \\ x>0 \\ y=2{,}5\,. \end{array}\right.$$

Тъй като правата с уравнение $y = 2{,}5$ не пресича триъгълник *PQM,* то системата (3) няма решение и следователно отговорът на въпроса е отрицателен.

За да отговорим на въпроса в подточка в) получаваме две системи:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} x + y \le 10 \\ 3x + 8y \ge 45 \\ x \ge 7{,}5 \\ y > 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad (5)\quad \begin{vmatrix} x + y \le 10 \\ 3x + 8y \ge 45 \\ x > 0 \\ y \ge 7{,}5\,. \end{vmatrix}$$

Системата (4) няма решение, но системата(5) има, така че отговорът е: ракета *B* може да изнесе съоръжение с тегло 7,5 тона с един полет.



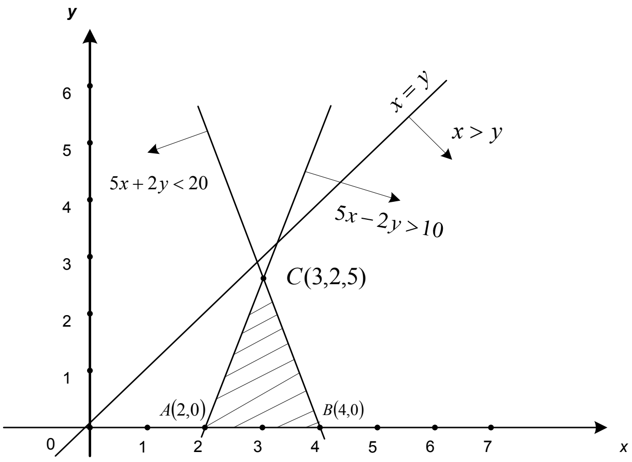
Фиг.2

Задача 3. Две опаковки круши и пет опаковки праскови са по-леки от 20 кг. Пет опаковки праскови са по-тежки от две опаковки круши увеличени с 10 кг. Коя опаковка е по-тежка, с круши или с праскови?

Решение. Да означим с x и y съответно теглото (в кг) на една опаковка праскови и една опаковка круши. Тогава условието на задачата води до системата:

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 5x + 2y < 20 \\ 5x - 2y > 10 \\ x > 0 \\ y > 0\,. \end{vmatrix}$$

На пръв поглед този модел не отговаря пряко на поставения в задачата въпрос. Да построим графичното решение на системата (6) – фиг. 3. То представлява вътрешността на триъгълник *ABC*. Координатите на върховете *A*, *B* и *C* са съответно (2, 0), (4, 0) и (3; 2,5). Построяваме и правата с уравнение $x = y$. Сега виждаме, че триъгълник лежи изцяло под нея. Следователно множеството от точки, които задават решението на (6) е подмножество на множеството от точки, които са решение на неравенството $x > y$. И така, по-тежка е опаковката с праскови.



Фиг.3

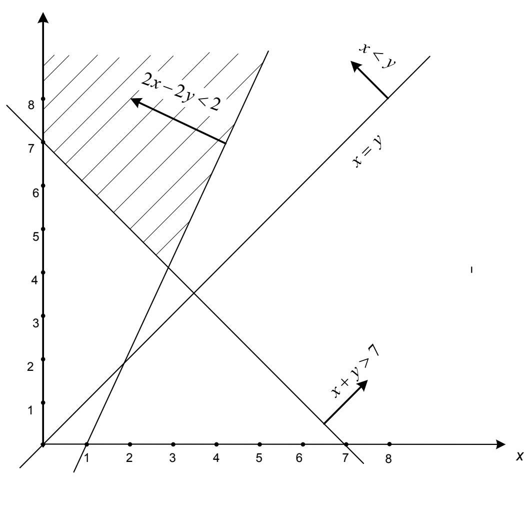
В ползата от съставянето и решаването на подобни модели учениците могат да се убедят и с решаването на някои известни задачи.

Задача 4. ([4], стр. 71, зад. 139) Разстоянието между A и B е 7 км. Двама пешеходци тръгнали едновременно един срещу друг от A и B и се срещнали след по-малко от час. Ако първият имаше два пъти по-голяма скорост, а скоростта на втория беше с 2 км/ч по-голяма от действителната му, то до момента на срещата вторият щеше да измине по-голямата част от пътя. Скоростта на кой пешеходец е била по-голяма, ако вторият за един час изминава повече от 5 км?

Решение. Да означим с x и y съответно скоростите в км/ч на пешеходеца от A и на този от B. Математическия модел, който получаваме е:

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{l} x + y > 7 \\ 2x < y + 2 \\ y > 5 \\ x > 0\,. \end{array} \right.$$

Графичното решение на системата (7) е дадено на фиг. 4. Построяваме и правата с уравнение $x = y$. Тъй като решението на математическия модел се представя с множество от точки, които лежат изцяло над тази права, то следва, че координатите им удовлетворяват неравенството $x < y$. С това задачата е решена. По-голяма е скоростта на пешеходеца тръгнал от B.



Фиг.4

Задача 5. ([4], стр. 71, зад. 140) Ученик си събирал пари, за да си купи портмоне, писалка и книга. Ако портмонето беше 5 пъти по-евтино, писалката – 2 пъти, а книгата – 2,5 пъти, то покупката би струвала 0,8 лева. Ако пък по отношение на първоначалната цена портмонето беше 2 пъти по-евтино, писалката – 4 пъти, а книгата – 3 пъти, те биха стрували 1,2 лева. Колко струва цялата покупка и за кое е платено повече – за портмонето или за писалката?

Решение. Означаваме с x, y и z съответно първоначалната цена в левове на портмонето, писалката и книгата. Математическият модел, след освобождаване от знаменател е:

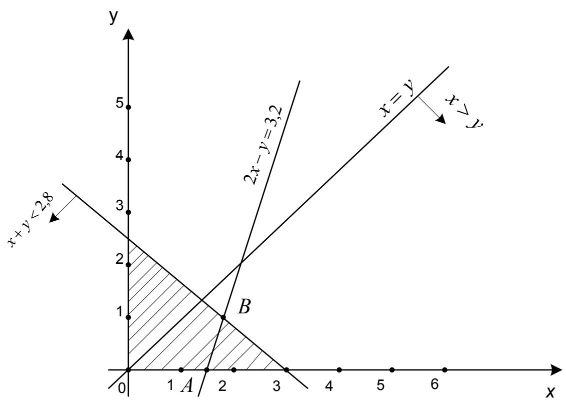
$$(8)\qquad \left|\begin{array}{l} 2x+5y+4z=8 \\ 30x+15y+20z=72 \\ x>0,\ y>0,\ z>0\ . \end{array}\right.$$

За да намерим колко струва цялата покупка умножаваме двете страни на първото уравнение с 5 и го изваждаме от второто. Получаваме $20x-10y=32$ или $10x-5y=16$. Второто уравнение преобразуваме така $20x+20y+20z+10x-5y=72 \Leftrightarrow 20(x+y+z)+16=72$ и намираме, че $x+y+z=2{,}8$.

Отговорът на другия въпрос ще намерим графично. Вече получихме, че $x+y+z=2{,}8$, следователно $0<x+y<2{,}8$. Като имаме пред вид, че $10x-5y=16$ съставяме следния модел:

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{l} 2x-y=3{,}2 \\ x+y<2{,}8 \\ x>0 \\ y>0\ . \end{array}\right.$$

Графичното решение на системата е дадено на фиг. 5. То представлява отсечката AB без самите точки A и B. Тъй като тя лежи изцяло под правата с уравнение $x=y$ следва, че за всички наредени двойки, които удовлетворяват математическия модел имаме $x>y$, т.е. портмонето е по-скъпо.



Фиг.5

Разгледаните примери показват достатъчно красноречиво интересните приложения, които може да намери математическото моделиране със системи неравенства от първа степен с две неизвестни. Наличието на допълнителни часове за факултативна и свободно избираема подготовка по математика дава възможност учениците да бъдат запознати с тях. Това би допринесло за обогатяване на математическите им знания и на съдържанието на понятието математически модел.

Предложените задачи биха могли да бъдат решени и по друг начин, но графичното решаване е особен благодатно. То води до подобряване на графичната култура на учениците, Усъвършенства умението им да построяват и четат графики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Геров и др. Алгебра за 7. клас. София, 1985.
2. Г. Геров и др. Алгебра за 8. клас. София, 1982.
3. З. Запрянов и др. Учебно помагало за свободно избираема подготовка в 11. клас на ЕСПУ. София, 1987.
4. К. Коларов и др. Сборник задачи по алгебра 7.-10. клас. София, 1984.
5. Г. Паскалев и др. Учебно пособие за факултативна подготовка по математика в 9. клас на ЕСПУ. София, 1986.